

Algunos problemas de Ecuaciones Funcionales

1. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$ (Fase Local 2019)

2. Encontrar las funciones reales f , de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales. (Fase Local 2018)

3. Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumplen, para todo x real positivo, la condición

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}.$$

(Fase Local 2011)

4. Sea \mathbb{R}^+ el conjunto de los números reales positivos. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1), \quad \text{para todo } x, y > 0.$$

(Fase Nacional 2018)

5. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. (Fase Nacional 2012)

6. Halla todas las funciones $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, tales que

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

7. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Encuentra todas las $f(x)$ tales que

$$(f(x))^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1$.